

Mathematische Grundlagen über reine und temperierte Intervalle und Konsequenzen bei der Stimmung einer Gitarre

Im folgenden werden die Frequenzverhältnisse bei reinen und temperierten Intervallen tabellarisch aufgestellt.

Potenzen von $\mu := 2^{1/12}$ (12-te Wurzel aus 2)		Intervallbezeichnung	Natürliches Frequenzverhältnis	Verhältnis T/R (T=temperiert R=rein)	Abweichung $1 - (T/R)$ (*)
$\mu^0 = 1.0000000$		Prim	$1.0000000 = 1/1$	1.0000000	0
$\mu^1 = 1.0594630$		Kleine Sekunde	Dissonanz	-	-
$\mu^2 = 1.1224620$		Große Sekunde	Dissonanz	-	-
$\mu^3 = 1.1892071$		Kleine Terz	$1.2000000 = 6/5$	0.99100591667	0.00899408333
$\mu^4 = 1.2599210$		Große Terz	$1.2500000 = 5/4$	1.0079368	-0.0079368
$\mu^5 = 1.3348398$		Quarte	$1.3333333 = 4/3$	1.001129850	-0.001129850
$\mu^6 = 1.4142135$		Verminderte Quinte	Dissonanz	-	-
$\mu^7 = 1.4983070$		Quinte	$1.5000000 = 3/2$	0.99887133333	0.00112866667
$\mu^8 = 1.5874010$		Kleine Sexte	$1.6000000 = 8/5$	0.99212565748	0.00787434251
$\mu^9 = 1.6817928$		Große Sexte	$1.6666666 = 10/6$	1.009075680	-0.009075680
$\mu^{10} = 1.7817974$		Kleine Septime	Dissonanz	-	-
$\mu^{11} = 1.8877486$		Große Septime	Dissonanz	-	-
$\mu^{12} = 2.0000000$		Oktave	$2.0000000 = 2/1$	1.0000000	0

(*) Das Vorzeichen '-' bedeutet, daß das temperierte Intervall größer ist als das reine Intervall. Dieses ist der Fall bei **großer Terz, Quarte und großer Sexte**. Bei den komplementären Intervallen **kleine Sexte, Quinte und kleine Terz** ist das temperierte Intervall kleiner als das reine Intervall.

Konsequenzen für die Stimmung einer Gitarre (mit den Saiten E, A, D, g, h, e):

1. Die Saiten E und e sollten unbedingt rein stimmen (Überprüfung per Flageolet).
2. Bei Vergleich der Saiten A mit E über Flageolet-Ton e ertönt auf der A-Saite die natürliche Quinte, die verglichen mit der temperierten Frequenz etwas zu groß ist. Um der temperierten Quarte A/E näherzukommen, muß bei dem Vergleich der Flageolet-Ton e auf der A-Saite etwas höher intoniert sein.
3. Beim Vergleich der Saiten E und h über Flageolet-Ton h ertönt h auf der E-Saite als natürliche Quinte etwas zu hoch. Daher muß die h-Saite bei dem Vergleich mit dem Flageolet-Ton h auf der E-Saite etwas tiefer intoniert sein.

Eine hoch intonierte h-Saite ist eine Annäherung an die reine Stimmung e-Moll anstelle der temperierten Stimmung. Dies gilt in noch stärkerem Maße für die g-Saite, s. unten.

Möglicher (häufiger) Fehler:

Man stimme A = 440 Hz und stimme mit Flageolet E über e (= 4 E) und D über 4A. Dann ergeben sich folgende Frequenzen (in Hz):

E-Saite: 330	3. Oberton e = 4E = 1320 Hz der E-Saite gemeinsam mit 2. Oberton der A-Saite
A-Saite: 440	nach Stimmgabel
D-Saite: 586.67	3. Oberton 4A = 1760 Hz der A-Saite gemeinsam mit 2. Oberton der D-Saite

Die Baß-Saiten sind nun in reinen Quartan gestimmt. Wir stimmen nun h und e nach E sowie die g-Saite:

h-Saite: 990	h = 3. Oberton der E-Saite
e-Saite: 1320	e = 4. Oberton der E-Saite
g-Saite: 782 < g < 792	wird mit Hilfe der D-Saite und der h-Saite als Kompromiß gestimmt.

Es wird nunmehr angenommen, daß die Bundstäbe auf dem Griffbrett temperierte Intervalle erzeugen. Dann hat der Ton d := 2D auf der h-Saite am 3. Bund die Frequenz

$$\begin{aligned} d &= 990 \cdot \mu^3 = 990 \cdot 1.1892071 \\ &= 1177.315 \text{ Hz.} \end{aligned}$$

Dagegen ist die Oktave auf der D-Saite

$$2D = 1173.34 \text{ Hz}$$

Damit ist das Verhältnis

$$d/D = 2.00677552968449$$

eine sehr unsaubere Oktave.

Außerdem gibt es für die Stimmung der g-Saite einen unklaren Bereich von

$$\begin{aligned} g^- &:= D \cdot 4/3 = 782.22667 \quad \text{bis} \\ g^+ &:= h \cdot 4/5 = 792, \end{aligned}$$

$$\text{wobei } g^- / g^+ = 0.98766$$

bereits auf halbem Wege zu einem Vierteltonschritt liegt (0.98566 ist ein halber Vierteltonschritt, 0.97153 ist ein Vierteltonschritt!) Dieser mathematisch begründete Effekt ist sicherlich jedem Gitarristen bereits einmal aufgefallen. Als Konsequenz müssen die Quarten im Baß größer und die h-Saite tiefer gestimmt sein.

Temperierte Stimmung auf Basis A = 440 Hz:

E-Saite: 329.62757	$A / \mu^5 = 440 / 1.3348398$	statt 330.0
A-Saite: 440.00000	nach Stimmgabel	
D-Saite: 587.32951	$A \cdot \mu^5 = 440 \cdot 1.3348398$	statt 586.67
g-Saite: 783.99090	$2A / \mu^2 = 880 / 1.1224620$	relativ tief
h-Saite: 987.76656	$2A \cdot \mu^2 = 880 \cdot 1.1224620$	statt 990.0
e-Saite: 1318.51028	4E	

Idealstimmung als Kompromiß:

In einem Kompromiß wird nun versucht, eine leichte Bevorzugung der Tonart e-Moll bei gleichzeitiger Verlagerung der Unreinheiten in den Terz-Bereich der g-Saite zu erreichen:

Saite	Rein nach e-Moll	Temperiert	Kompromiß	Intervall	Kommentar zum Kompromiß
E	330 (= $440 \cdot 3/4$)	329.63	330	$A/E=1.3333$	reine Quarte von A nach unten
A	441 ($(=990/2)/\mu^2$)	440.00	440	$D/A=1.3340$	vergrößerte Quarte (fast temperiert)
D	588 ($(=660/\mu^2)$)	587.33	587	$g/D=1.3390$	sehr stark vergrößerte Quarte
g	792 ($(=660 \cdot 6/5)$)	783.99	786	$h/g=1.2582$	vergrößerte Terz
h	990	987.77	989	$e/h=1.3347$	vergrößerte Quarte (quasi temperiert)
e	1320	1318.51	1320	$e/E=4.0$	zwei reine Oktaven über E

Bei der Stimmung nach e-Moll ist die A-Saite um 1 Hz. erhöht, da beim Griff am 2. Bund eine temperierte, zu kleine große Sekunde entsteht; analog bei der D-Saite. Das Intervall $g/D=1.3469$ ist in der e-Moll-Stimmung extrem groß und für andere Tonarten ungeeignet. Daher muß in jedem Falle ein Kompromiß gefunden werden.

Man entnimmt aus der Tabelle der Frequenzverhältnisse, daß die Abweichung von temperiertem und reinem Intervall bei Terzen und Sexten am größten ist. Daher ist $h/g = 1.2582 = 1.25 + 0.0082$ noch weniger von der reinen großen Terz entfernt als die temperierte Terz 1.2599. Dagegen ist $g/D = 1.3390 = 1.33484 + 0.00416 = 1.3333 + 0.0057$ deutlich stärker von einer reinen Quarte entfernt als eine temperierte Quarte, aber absolut betrachtet weniger stark als die Abweichung des Intervalles h/g von einer reinen großen Terz. So könnte eine praktikable Gitarrenstimmung beschaffen sein. Wenn man aber beispielsweise das Präludium Nr. 1 von Heitor Villa-Lobos spielt, das die Tonart e-Moll sehr bevorzugt, so wird man vorher die g-Saite etwas hochstimmen.//