



UdK Berlin
Sengpiel
12.2008
F + A

! Antworten zu "Frequenzverhältnisse von Tonabständen"

Zwölf gleichschwebend-temperierte Halbtöne ergeben zusammen das Intervall einer Oktave. Jeder Halbtonschritt hat das Frequenzverhältnis von $y = \sqrt[12]{2}$, denn diese Zahl zwölfmal mit sich selbst multipliziert ergibt 2, das ist das Frequenzverhältnis einer Oktave. Der Taschenrechner zeigt für $2^{1/12} = 1,059463094$, also das Frequenzverhältnis eines Halbtonschritts.

Ein Halbtonschritt ist das Frequenzverhältnis $y = f_2 / f_1 = 1,059463$

Das Intervall eines Ganztons hat das Frequenzverhältnis von $y = 1,059463$ zum Quadrat = 1,122462.

Eine Quinte hat das Frequenzverhältnis von $y = 1,498307$ und eine Quarte hat 1,334840. Beide Zahlen liegen sehr dicht bei der reinen Stimmung mit dem Frequenzverhältnis von $3 / 2 = 1,500000$ bzw. $4 / 3 = 1,333333$.

Die große Terz hat das Frequenzverhältnis von $y = 1,259921$ und die kleine Terz hat 1,189207. Das Frequenzverhältnis liegt hierbei nicht so dicht bei der reinen Stimmung mit $5 / 4 = 1,25$ und $6 / 5 = 1,2$.

Frage:

1. Um wie viel Prozent ändert sich die Tonhöhe, wenn man sie mit "Pitch Shifting" um einen Viertelton höher stellt? $2^{1/24} = 1,029302237$ zeigt der Taschenrechner. Das sind also **2,93 %**. Auch mit der Wurzel aus dem Halbtonschritt 1,059463 geht das zu berechnen.

Cent-Einteilung von Tonabständen

Anstatt mit Frequenzverhältnissen zu arbeiten, vergleicht man oft die Größe der Intervalle mit Hilfe der Cent-Einteilung. Das Cent eignet sich vor allem in der musikalischen Akustik zur genauen zahlenmäßigen Darstellung sehr kleiner Intervalle und bei der Untersuchung fremdländischer Tonsysteme. Ein Cent ist ein Hundertstel eines Halbtonschritts in der gleichschwebend-temperierten Stimmung, das heißt umgekehrt, ein Halbtonschritt hat 100 cent und ein Ganztonschritt hat 200 cent. Deshalb hat eine Oktave auch 1200 cent und eine reine Quinte demnach 700 cent.

Ein Cent ist das Frequenzverhältnis $y = f_2 / f_1 = 2^{1/1200} = 1,00057779$

100 cent sind das Frequenzverhältnis von $2^{1/12} = 1,059463094$, also ein Halbtonschritt.

Frage:

2. Wie viel Cent war zu Mozarts Zeiten die Stimmung des Kammertons a' mit $f_2 = 421$ Hz tiefer als der heutige Kammerton a' mit $f_1 = 440$ Hz?

Da ein Cent 1/1200 einer Oktave ist und eine Oktave das Frequenzverhältnis 2 : 1 hat, kann die Cent-Zahl x ermittelt werden.

$$2^{x/1200} = f_2 / f_1. \text{ Beide Seiten logarithmiert ergibt: } (x / 1200) \cdot \log 2 = \log (f_2 / f_1)$$

Nach x aufgelöst ergibt:

$$x = (1200 / \log 2) \cdot (\log (f_2 / f_1))$$

Unsere Zahlenwerte in die Gleichung eingesetzt ergeben: $x = (1200 / 0.30103) \cdot (\log 440 / 421) = \mathbf{76,42 \text{ cent}}$. Die Stimmung war also um 1770 etwa einen $\frac{3}{4}$ -Halbton tiefer als es heute üblich ist.

Merke: Im Gegensatz zu anderen Sprachen heißt der Plural im Deutschen nicht "cents", sondern "cent" und wird als Maßeinheit für das Frequenzverhältnis ausnahmsweise häufig klein geschrieben.

Mathematik der Oktave

Frage:

3. Wie groß ist die berechnete Anzahl der Oktaven n im Hi-Fi-Frequenzbereich von $f_1 = 20$ Hz bis $f_2 = 20$ kHz?

$$f_2 / f_1 = 2^n. \text{ Beide Seiten logarithmiert ergibt: } n \cdot \log 2 = \log (f_2 / f_1)$$

Nach n aufgelöst ergibt:

$$n = \log (f_2 / f_1) / \log 2$$

Unsere Zahlenwerte in die Gleichung eingesetzt ergeben: $n = \log 1000 / \log 2 = \mathbf{9,966 \text{ Oktaven}}$.

Der Frequenzbereich des menschlichen Hörens von 20 Hz bis 20 kHz beträgt fast genau 10 Oktaven.

Frage:

4. Wie viel Cent hat das Intervall einer gleichschwebend temperierten "verminderten Quinte" (diabolo in musica), wie groß ist das Frequenzverhältnis y und wie viel Prozent ist die Frequenz des oberen Tons höher als der untere?

Das Intervall besteht aus sechs Halbtönen, daher beträgt der Tonabstand 600 cents. Das Frequenzverhältnis y ist genau Wurzel aus 2 = 1,414213562, d.h. die Frequenz des oberen Tons ist 41,42 % höher als der untere.

Gleichschwebend-temperierte Intervalle:

Halbton	= kleine Sekunde	= 100 cent	= $2^{1/12}$	= 1,059463094
Ganzton = 2 Halbtöne	= große Sekunde	= 200 cent	= $2^{2/12} = 2^{1/6}$	= 1,122462048
1 ½-Ton = 3 Halbtöne	= kleine Terz	= 300 cent	= $2^{3/12} = 2^{1/4}$	= 1,189207115
2 Ganztöne = 4 Halbtöne	= große Terz	= 400 cent	= $2^{4/12} = 2^{1/3}$	= 1,259921050
2 ½-Ton = 5 Halbtöne	= reine Quarte	= 500 cent	= $2^{5/12}$	= 1,334839854
3 Ganztöne = 6 Halbtöne	= verm. Quinte	= 600 cent	= $2^{6/12} = 2^{1/2}$	= 1,414213562 usw.

Umrechnung der Intervalle - Cent nach Frequenz (Ratio) <http://www.sengpielaudio.com/Rechner-centfrequenz.htm>